

Simulacro ONEM - 3ra fase

- 1 Armando, Daniele y Joaquín fueron de compras. Daniele gastó solamente el 15% de lo que gastó Joaquín. Sin embargo, Armando gastó 60% más que Joaquín. Juntos gastaron \$5, 500. ¿Cuánto gastó Armando?

Solución

Juntos gastaron $15\% + 100\% + 160\% = 275\%$ de lo que gastó Joaquín. Así, Joaquín gastó

$$\frac{5,500 \times 100}{275} = 2,000$$

Como Armando gastó el 60% más, gastó \$3,200.

Respuesta: 3200

- 2 Chantal quiere escoger dos días diferentes de la semana para trotar y no quiere trotar dos días consecutivos. Cada semana trotará los mismos días, ¿De cuántos maneras puede escoger los días?

Solución

Si empieza en lunes no puede terminar en domingo, así que hay 4 posibilidades (de miércoles a sábado); si empieza en martes también son 4, (pues puede terminar en domingo), si empieza en miércoles son 3 posibilidades, en jueves hay 2 y en viernes hay 1. En total son 14.

Respuesta: 14

- 3 Cuatro primas, Ema, Iva, Rita y Zina, tienen las edades de 3, 8, 12 y 14 años, pero no necesariamente en ese orden. La suma de las edades de Zina y Ema es divisible por 5. La suma de las edades de Zina y Rita también es divisible por 5. ¿Cuántos años tiene Iva?

Solución

Las únicas sumas que dan una cantidad divisible por 5 son $12 + 8$ y $12 + 3$, así Zina debe tener 12, Ema tiene 3, Rita 8 y, por lo tanto, Iva tiene 14.

Respuesta: 14

- 4 Una computadora produjo una fila de números 0 y de números 1. Se sabe que hay mil ceros y cien unos. ¿Cuál es la mínima longitud de una secuencia dentro de la fila que seguro tiene dos ceros seguidos?

Solución

Cuando no hay ceros juntos es porque al menos un 1 está entre ellos. El uso más eficiente de los números 1 que separe a los ceros es cuando los unos también están separados. De esta manera, si se alternan los ceros con los unos empezando y terminando con 0, se produce una cadena lo más larga posible sin ceros juntos. Una secuencia 0101 · · · 010 que repita 01 cien veces y termine en 0 es lo más largo posible sin ceros consecutivos y tiene 201 términos. Cualquier secuencia con 202 términos contendrá dos ceros seguidos.

Respuesta: 202

- 5 Un rectángulo está dividido en 40 cuadritos iguales. Sunya eligió una columna y la coloreó toda. Quedaron varios cuadritos sin colorear y la cantidad de columnas que no quedaron coloreadas es par. ¿Cuántos cuadritos quedaron sin colorear?

Solución

Las únicas posibilidades para dividir el rectángulo en 40 cuadritos iguales es a partir de cuadrículas de 1×40 , 2×20 , 4×10 y 5×8 , donde una de las dimensiones es la cantidad de renglones y la otra la cantidad de columnas. Como la cantidad de columnas debe ser impar y mayor que 1, la única posibilidad es que se haya dividido en 5 columnas y 8 renglones. De esta manera, tenemos que Sunya iluminó una columna con 8 cuadritos.

Respuesta: 8

- 6 El área del triángulo ABC es 12 cm^2 . Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente, y sea G el punto donde se cortan los segmentos BN y CM. Calcule el área del cuadrilátero AMGN.

Solución

Como $CN = \frac{1}{2}CA$ se tiene $[CNB] = \frac{1}{2}[CAB] = 6\text{cm}^2$. Análogamente $[BMC] = \frac{1}{2}[BAC] = 6\text{cm}^2$.

Y como $MG = \frac{1}{3}MC$ resulta $[MGB] = \frac{1}{3}[MCB] = \frac{6}{3} = 2\text{cm}^2$. Luego $[AMGN] = [ABC] - [BCN] - [MGB] = 12 - 6 - 2 = 4\text{cm}^2$.

Respuesta: 4

- 7 Determine cuántos números formados por cuatro dígitos (todos distintos entre sí) que cumplen con la siguiente propiedad: si sumas el número formado por sus dos primeros dígitos con el número formado por sus dos últimos dígitos, obtienes el número formado por los dos dígitos centrales. Es decir, si $\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos que cumple la propiedad, entonces $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$.

Solución

De la condición $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$ tenemos que $10(a + c) + b + d = 10b + c$, es decir, $10a + d = 9(b - c)$. Luego, $10a + d$ debe ser múltiplo de 9 y en consecuencia, $a + d$ también.

Como a y d son dígitos, tenemos que las posibilidades para a y d son: $(a, d) = (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2)$ y $(8, 1)$. (Note que si $a = 0$, entonces el número $\overline{abcd}$ sería de 3 dígitos; y si $d = 0$, entonces a tendría que ser 9 y por lo tanto $b - c = 10$ lo cual no es posible).

Si $(a, d) = (1, 8)$, entonces $(b, c) = (2, 0), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5), (9, 7)$.

Si $(a, d) = (2, 7)$, entonces $(b, c) = (3, 0), (4, 1), (6, 3), (8, 5), (9, 6)$.

Si $(a, d) = (3, 6)$, entonces $(b, c) = (4, 0), (5, 1), (8, 4), (9, 5)$.

Si $(a, d) = (4, 5)$, entonces $(b, c) = (6, 1), (7, 2), (8, 3)$.

Si $(a, d) = (5, 4)$, entonces $(b, c) = (6, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3)$.

Si $(a, d) = (6, 3)$, entonces $(b, c) = (7, 0), (8, 1), (9, 2)$.

Si $(a, d) = (7, 2)$, entonces $(b, c) = (8, 0), (9, 1)$.

Si $(a, d) = (8, 1)$, entonces $(b, c) = (9, 0)$.

Por lo tanto, en total hay 28 números de cuatro dígitos que satisfacen el problema.

Respuesta: 28

- 8 ¿Cuántas ternas de números de tres dígitos cada uno se pueden obtener, usando los números del 1 al 9 una sola vez y tal que los números de las ternas estén relacionados en razón $1 : 2 : 3$? Es decir, si n , m y s son los números, entonces $m = 2n$ y $s = 3n$.

Solución

Sean n , $2n$ y $3n$ los números. Como todo entero es congruente con la suma de sus dígitos módulo 9, tenemos que $n + 2n + 3n = 6n \equiv 1 + 2 + \dots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}$.

Entonces $6n$, y en consecuencia $3n$, son divisibles entre 9. Como $3n$ es uno de los tres números, el primer dígito de n no puede ser mayor que 3, y entonces tenemos que el último dígito de n no puede ser 1, ya que el entero $2n$ terminaría en 2 y $3n$ en 3 y ninguno de estos tres enteros podría ser usado para empezar como dígito de las centenas para el número n .

El entero n no puede terminar en 5, ya que $2n$ terminaría en 0 y esto es imposible. Supongamos ahora que el dígito de las unidades de n es 2.

Entonces los dígitos de las unidades de $2n$ y $3n$ son respectivamente 4 y 6, y los otros dos dígitos de $3n$ pueden ser escogidos entre 1, 3, 5, 7, 8 o 9. Como la suma de todos los dígitos de $3n$ tiene que ser un múltiplo de 9, los primeros dos dígitos de $3n$ son 3 y 9 o 5 y 7.

Pero checando todas las posibilidades, encontramos que los números 192, 384 y 576 satisfacen las condiciones del problema. Análogamente consideramos los casos para los cuales n termina en 3, 4, 6, 7, 8 o 9.

Esto nos dará otras tres soluciones: 273, 546 y 819; 327, 654 y 981; 219, 438 y 657.

Por lo tanto, hay 4 ternas en total.

Respuesta: 4

- 9 Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$. Considera los mayores divisores impares de cada uno de los elementos de A y súmalos. ¿A cuánto es igual esta suma?

Solución

Sea m un número entero. Tenemos que

1. Si m es impar, entonces el mayor divisor impar de m es él mismo.
2. Si $m = 2k$, entonces el mayor divisor impar de m es k .
3. Si $m = 2^k$, entonces el mayor divisor impar de m es 1.

Sea $S(a, b, c, \dots)$ la suma de los mayores divisores impares de $a, b, c, \dots$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} S_5 &= S(1, 2, \dots, 2^5 = 32) \\ &= S(1, 3, \dots, 31) + S(2, 4, 6, \dots, 32) \\ &= 1 + 3 + \dots + 31 + S(1, 2, 3, \dots, 16) \\ &= 16^2 + S(1, 2, 3, \dots, 2^4 = 16) \\ &= 256 + S_4 \end{aligned}$$

Continuando de esta forma, tendremos que:

$$S_n = (2^{n-1})^2 + S_{n-1}$$

Por lo que:

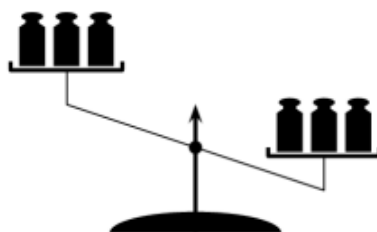
$$\begin{aligned} S_5 - S_4 &= (2^4)^2 \\ S_4 - S_3 &= (2^3)^2 \\ S_3 - S_2 &= (2^2)^2 \\ S_2 - S_1 &= (2^1)^2 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} S_5 - S_1 &= 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 \\ S_5 - 2 &= 256 + 64 + 16 + 4 \\ \implies S_5 &= 342 \end{aligned}$$

Respuesta: 342

- 10 En una balanza de platillos se colocan al azar tres pesas diferentes en cada platillo. El resultado se muestra en la figura. Las pesas son de 101, 102, 103, 104, 105 y 106 gramos. ¿Cuál es la probabilidad, en porcentaje, de que la pesa de 106 gramos esté en el platillo más pesado (o sea en el de la derecha)?



Solución

Las 5 pesas pesan 621 gr. Hay $\binom{6}{3} = 20$ subconjuntos de 3 pesas. Si uno de esos conjunto pesa más de 310,5 gr, su complemento pesa menos de 310,5 gr, por lo tanto hay exactamente 10 posibles conjuntos de pesas para el platillo derecho.

De ellos, los únicos que no contienen la pesa de 106 gr son 102, 104, 105 y 103, 104, 105. Luego la pesa de 106 gr está en 8 de 10 conjuntos posibles, es decir en el 80%.

Respuesta: 80